

概念格在二值命题逻辑命题集约简中的应用

李立峰¹, 张东晓²

(1. 西安邮电学院应用数理系, 陕西西安 710121; 2. 集美大学理学院, 福建厦门 361021)

摘 要: 概念格的属性约简理论和命题逻辑系统中命题集的约简理论似乎是独立发展的两个研究分支, 本文在二值命题逻辑中引入由命题集 Γ 所诱导的形式背景的概念, 并基于此建立了概念格; 在二值命题逻辑中提出了命题集 Γ 的约简理论, 即在保持 Γ 推理能力不变的前提下对 Γ 中的成员进行约简; 运用概念格的方法从 Γ 及其子集的关系出发给出了 Γ 约简的判定定理以及求 Γ 约简的方法.

关键词: 完备性定理; 形式背景; Γ 约简; 概念格

中图分类号: O141 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 08-1538-05

The Application of Concept Lattice Theory in the Reduction of the Proposition Set in Two-Valued Propositional Logic

LI Li-feng¹, ZHANG Dong-xiao²

(1. Department of Applied Mathematics and Physics, Xi'an Institute of Posts and Telecommunications, Xi'an, Shaanxi 710121, China; 2. School of Sciences, Jimei University, Xiamen, Fujian 361021, China)

Abstract: Attribute reduction theory and the Γ -reduction theory in propositional logic arose in two rather different fields. In this paper, by introducing the formal context induced by Γ , the mutual relationship between them are investigated, then the concept lattices are built based on the formal context induced by Γ . The main purpose of this paper is to introduce the theory of Γ -reduction in two-valued propositional logic, which is the minimal set $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ such that $D(\Gamma_0) = D(\Gamma)$. Several ways to determine the Γ -reduction are studied by investigating the relationship between Γ and their subsets; an algorithm to explore the reduction by concept lattice theory is given.

Key words: completely theorem; formal context; Γ -reduction; concept lattice

1 引言

在命题逻辑中, 如果给定命题集 Γ , 用 $D(\Gamma)$ 表示全体 Γ 结论之集, $D(\Gamma)$ 的复杂程度跟 Γ 有着密切的关系, 因此在计算 $D(\Gamma)$ 之前先对 Γ 集进行约简, 即删掉 Γ 集中的在计算 $D(\Gamma)$ 时无用的公式就显得十分必要. 文献 [1] 中就此进行了讨论. 对 Γ 集进行约简时, 一种思路就是从语构的角度出发判断一个公式 A 是否属于 $D(\Gamma - \{A\})$, 如果 A 属于 $D(\Gamma - \{A\})$, 则从 Γ 中删掉 A 就不会影响 $D(\Gamma)$ 的结构, 如果 A 不属于 $D(\Gamma - \{A\})$, 则不能通过计算 $D(\Gamma - \{A\})$ 来计算 $D(\Gamma)$. 例如在二值命题逻辑中, $\Gamma = \{A_1, A_2, A_1 \rightarrow A_2\}$, 因为由 A_1 和 $A_1 \rightarrow A_2$ 运用 MP 规则就可以推出 A_2 , 则 $D(\Gamma) = D(\Gamma_0)$, 其中 $\Gamma_0 = \{A_1, A_1 \rightarrow A_2\}$, 因此在计算 $D(\Gamma)$ 时我们只需计算 $D(\Gamma_0)$ 即可. 但是我们知道, 即使一个含有很少个公式的 Γ 集, $D(\Gamma)$ 可能含有很多甚至是无限多个公式, 因此要从语构方面通过上述方法判断 A 是否属于 $D(\Gamma - \{A\})$ 常

常是很不方便的.

概念格理论是 R. Wille 于 1982 年提出的^[2], 最近, 关于概念格约简及应用方面的文章也有出现^[3,4]. 本文尝试从逻辑语义的角度出发, 利用概念格的方法在二值命题逻辑系统中建立了有限命题集 Γ 的约简理论. 由于在二值命题逻辑中语义与语构是和谐的, 即有完备性定理成立, 因此自然可以导出语构上相应的结论. 这种思想的特点在于它不借助于结论集 $D(\Gamma)$ 而直接从 Γ 与 Γ 子集的关系出发来判断哪些公式在计算 $D(\Gamma)$ 时是多余的.

2 二值命题逻辑 L 与概念格

首先, 我们简要给出二值命题逻辑 L 的语构和语义理论.

定义 1^[5,6] 设 $S = \{p_1, p_2, \dots\}$, 作 $F(S)$ 如下:

(1) $p_1, p_2, \dots \in F(S)$;

(2) 若 $A, B \in F(S)$, 则 $\neg A, A \rightarrow B \in F(S)$;

(3) $F(S)$ 中的元都可以通过(1)与(2)而得到.

$F(S)$ 是 S 生成的 $\neg, \rightarrow$ 型自由代数. S 中的元叫原子命题或者原子公式, $F(S)$ 中的元叫命题或者公式.

定义 2^[5,6] 形式系统 L 的一个证明是一个有限的公式序列 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 这里对每个 $A_i (i \leq n)$, A_i 是公理, 或者存在 $j, k < i$ 使得 A_i 是由 A_j 和 A_k 使用 MP 推得的结果. 上述证明叫做公式 A_n 的证明, A_n 叫做定理, 记做 $\vdash A_n$.

定义 3^[5,6] 设 $\Gamma \subset F(S)$. 从 Γ 的推演是一个公式序列 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 这里对每个 $A_i (i \leq n)$, A_i 是公理, 或者存在 $j, k < i$ 使得 A_i 是由 A_j 与 A_k 使用 MP 推得的结果. A_n 叫做 Γ -结论, 或 Γ 推出 A_n , 记做 $\Gamma \vdash A_n$.

记 $D(\Gamma) = \{A \in F(S) \mid \Gamma \vdash A\}$, 若 $D(\Gamma) \neq F(S)$, 则称 Γ 是相容的命题集.

定义 4^[5,6] 设 $v: F(S) \rightarrow \{0, 1\}$ 为映射, 若 v 是 $(\neg, \rightarrow)$ 型同态, 即 $v(\neg A) = \neg v(A)$, $v(A \rightarrow B) = v(A) \rightarrow v(B)$, 则称 v 为 $F(S)$ 的赋值, $v(A)$ 也叫公式 A 的赋值. $F(S)$ 的全体赋值之集记为 Ω .

定义 5^[5,6] 设 $A \in F(S)$, 若对每个赋值 $v \in \Omega$ 都有 $v(A) = 1$, 则称 A 为重言式. 若每个赋值 $v \in \Omega$ 都有 $v(A) = 0$, 则称 A 为矛盾式. A 为重言式也记为 $\vDash A$.

在二值命题逻辑中有下面的完备性定理成立:

命题 1^[5,6] 系统 L 中的公式 A 是定理当且仅当 A 是重言式. 即 $\vdash A$ 当且仅当 $\vDash A$.

设 $\Gamma \subset F(S)$, $A \in F(S)$, 如果当 $v(\Gamma) = \{v(B) \mid B \in \Gamma\} = 1$ 时有 $v(A) = 1$, 则称 Γ 是 A 的模型, 记作 $\Gamma \vDash A$. 则应用完备性定理易证以下命题成立:

命题 2^[5] $\Gamma \subset F(S)$, Γ 有限, $A \in F(S)$, 则

$\Gamma \vdash A$ 当且仅当 $\Gamma \vDash A$

概念格是基于 Galois 联络在对象与属性为二元关系的情况下建立的一种概念层次结构, 下面我们给出关于概念格的基本知识.

定义 6^[7] 设 (G, M, I) 是一个形式背景, 其中 $G = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ 为对象集, 每个 $o_i (i \leq n)$ 称为一个对象; $M = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ 为属性集, 每个 $k_j (j \leq m)$ 称为一个属性; I 为 G 和 M 之间的二元关系, $I \subset G \times M$. 若 $(o, k) \in I$, 则称对象 o 具有属性 k , 记为 olk .

对于形式背景 (G, M, I) , 在对象集 $A \subset G$ 和属性集 $B \subset M$ 上分别定义运算

$$f(A) = \{k \in M \mid \forall o \in A, olk\}$$

$$h(B) = \{o \in G \mid \forall k \in B, olk\}$$

定义 7^[7] 设 (G, M, I) 为形式背景, 如果一个二元组 (A, B) 满足 $f(A) = B$ 且 $h(B) = A$, 则称为一个形式概念, 简称概念. 其中 A 称为概念的外延, B 称为概念的内涵. 用 $L(G, M, I)$ 表示形式背景 (G, M, I) 上的全体概念, 定义

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 (B_1 \supseteq B_2)$$

则 $\leq$ 是 $L(G, M, I)$ 上的偏序关系.

若 $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ 是概念, 则

$$(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) = (A_1 \cap A_2, fh(B_1 \cup B_2))$$

$$(A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) = (fh(A_1 \cup A_2), B_1 \cap B_2)$$

也是概念, 从而, $L(G, M, I)$ 构成格.

3 有限命题集 Γ 所诱导的形式背景及 Γ 约简的定义

设命题集 $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 共含有 m 个原子公式, 不妨设为 $p_1, p_2, \dots, p_m$, 令 $\Omega_\Gamma = \{v \in \Omega \mid \text{存在 } A_i \in \Gamma, v(A_i) = 1, v(p_{m+k}) = 0, k = 1, 2, \dots\}$, 则 Ω_Γ 中的元素可以写成 m 维向量且 Ω_Γ 中至多含有 2^m 个元素. 定义 $v|A_i$ 当且仅当 $v(A_i) = 1$, 则 $(\Omega_\Gamma, \Gamma, I)$ 构成形式背景, 称由 Γ 所诱导的形式背景.

定义 8 设 $\Gamma \subset F(S)$. 对于由 Γ 所诱导的形式背景 $(\Omega_\Gamma, \Gamma, I)$, 在对象集 $P \subseteq \Omega_\Gamma$ 和属性集 $Q \subseteq \Gamma$ 上定义运算如下

$$f(P) = \{A_i \in \Gamma \mid \forall v \in P, v(A_i) = 1\}$$

$$h(Q) = \{v \in \Omega_\Gamma \mid \forall A_i \in Q, v(A_i) = 1\}$$

则易证如下命题成立:

定理 1 映射 f, h 形成 Ω_Γ 和 Γ 之间的 Galois 联络, 即对任意 $P, P_1, P_2 \subseteq \Omega_\Gamma, Q, Q_1, Q_2 \subseteq \Gamma$ 都有:

(1) 如果 $P_1 \subseteq P_2$, 则 $f(P_1) \supseteq f(P_2)$;

(2) $P \subseteq hf(P)$;

(3) 如果 $Q_1 \subseteq Q_2$, 则 $h(Q_1) \supseteq h(Q_2)$;

(4) $Q \subseteq fh(Q)$.

在 $(\Omega_\Gamma, \Gamma, I)$ 中, 易证如下命题成立

定理 2 设 $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq F(S)$, 在 $(\Omega_\Gamma, \Gamma, I)$ 中, Γ 为相容命题集当且仅当存在 $v \in \Omega_\Gamma$ 使得 $v(\Gamma) = 1$, 即 $h(\Gamma) = \emptyset$.

例 1 设 $\Gamma = \{p_1, p_2 \rightarrow p_3, (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3, \neg p_2, (\neg p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_3 \rightarrow \neg p_2), p_2 \rightarrow p_1 \rightarrow \neg p_3\} = \{A_1, A_2, \dots, A_6\}$, 则由 Γ 所诱导的形式背景 $(\Omega_\Gamma, \Gamma, I)$ 如下:

表 1 Γ 所诱导的形式背景 $(\Omega_\Gamma, \Gamma, I)$

I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$v_1(0, 0, 0)$	0	1	0	1	0	1
$v_2(1, 0, 0)$	1	1	1	1	0	1
$v_3(0, 1, 0)$	0	0	0	0	1	0
$v_4(0, 0, 1)$	0	1	1	1	1	1
$v_5(1, 1, 0)$	1	0	0	0	1	1
$v_6(1, 0, 1)$	1	1	1	1	1	1
$v_7(0, 1, 1)$	0	1	1	0	0	0
$v_8(1, 1, 1)$	1	1	1	0	0	0

在此形式背景中 $F(\{v_1, v_2\}) = \{A_2, A_4, A_6\}$,

$f(\{v_2, v_4, v_6\}) = \{A_2, A_3, A_4, A_6\}$, $f(\Omega_F) = \emptyset$; $h(\{A_2, A_4, A_6\}) = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$, $h(\{A_2, A_3, A_4, A_6\}) = \{v_2, v_4, v_6\}$, $h(\Gamma) = \{v_6\}$.

由定义 5、命题 1 和定义 8 易证如下结论成立:

定理 3 设 $\Gamma \subset F(S)$, $A \in F(S)$, 若 $\Gamma \vdash A$, 则在 $(\Omega_F, \Gamma, I_\Gamma)$ 中, $h(\Gamma) \subseteq h(\{A\})$.

命题集 Γ 的约简就是在保证 Γ 的推理能力不变 (即 $D(\Gamma)$ 不变) 的情况下对 Γ 进行约简, 即删去 Γ 中的不必要公式. 因为不相容的命题集在实际推理过程中对我们是没有多大用处的, 因此下面我们要讨论的 Γ 为有限相容的命题集, 即在形式背景 (Ω_F, Γ, I) 中, 存在 $v \in \Omega_F$ 使得 $v(\Gamma) = 1$.

下面我们给出命题集 Γ 约简的定义.

定义 9 设 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, 若 $D(\Gamma_0) = D(\Gamma)$, 则称 Γ_0 为 Γ 的协调集, 若进一步, $\forall A \in \Gamma_0, D(\Gamma_0 - \{A\}) \neq D(\Gamma)$ 则称 Γ_0 为 Γ 的一个约简.

定义 10 设命题集 Γ 的所有约简为 $\{\Gamma_i | \Gamma_i$ 为约简, $i \in \tau\}$ (τ 为指标集), 可将 Γ 中的公式分为

- (1) 必要公式 $A: A \in \bigcap_{i \in \tau} \Gamma_i$;
- (2) 不必要公式 $B: B \in \Gamma - \bigcap_{i \in \tau} \Gamma_i$;

显然, 如果 A 为不必要公式, 则 $\Gamma - \{A\}$ 为协调集.

由定义 9 立即可得如下结论

定理 4 有限命题集 Γ 的约简一定存在.

例 2 对于例 1 所给出的命题集 Γ 而言, $v_6(\Gamma) = 1$, 因此 Γ 相容. 容易验证 $\Gamma_1 = \{A_1, A_2, A_5\}$, $\Gamma_2 = \{A_1, A_3, A_5\}$, $\Gamma_3 = \{A_1, A_4, A_5\}$ 均为 Γ 的约简, 其中 $\{A_1, A_5\}$ 为必要公式, A_2, A_3, A_4, A_6 为不必要公式.

4 Γ 集约简的判定及性质

如前所述, 命题集 Γ 的约简实际上是 Γ 的一个极小的协调集, 因此, 为了求 Γ 的约简, 首先要给出协调集的判定定理. 本节正是基于由命题集 Γ 所诱导的形式背景 (Ω_F, Γ, I) 利用概念格的方法给出 Γ 约简的几个判定定理.

定理 5 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 为 Γ 的协调集当且仅当在 (Ω_F, Γ, I) 中, $h(\Gamma_0) = h(\Gamma)$.

证明 必要性. 若 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 为 Γ 的协调集, 因 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, 所以 $h(\Gamma_0) \supseteq h(\Gamma)$. 下证 $h(\Gamma_0) \subseteq h(\Gamma)$. $\forall A \in \Gamma$, 由 Γ_0 是 Γ 的协调集知 $A \in D(\Gamma_0)$, 因为 $\Gamma_0 \vdash A$, 所以 $\Gamma_0 \models A$. 即 $h(\Gamma_0) \subseteq h(\{A\})$, 所以 $h(\Gamma_0) \subseteq \bigcap_A h(\{A\}) = h(\Gamma)$. 因此, $h(\Gamma_0) = h(\Gamma)$.

充分性. 设 $h(\Gamma_0) = h(\Gamma)$, 下证 $D(\Gamma_0) = D(\Gamma)$. 由 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 知 $D(\Gamma_0) \subseteq D(\Gamma)$. 因此只需证明 $D(\Gamma_0) \supseteq D(\Gamma)$ 即可. $\forall A \in D(\Gamma)$. 由完备性定理知 $\Gamma \models A$, 因为 $h(\Gamma_0) = h(\Gamma)$, 所以 $v(\Gamma) = 1$ 当且仅当 $v(\Gamma_0) = 1$, 由 $\Gamma \models A$ 的

定义可知 $\Gamma_0 \models A$, 故有 $\Gamma_0 \vdash A$. 所以 $A \in D(\Gamma_0)$. 即 $D(\Gamma_0) = D(\Gamma)$, 所以 Γ_0 为 Γ 的协调集.

定理 6 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 为 Γ 的协调集当且仅当在 (Ω_F, Γ, I) 中, $h(\Gamma_0) \subseteq h(\Gamma - \Gamma_0)$.

证明 必要性. 若 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 为 Γ 的协调集, 由定理 5 知 $h(\Gamma_0) = h(\Gamma)$. 又因为 $\Gamma - \Gamma_0 \subseteq \Gamma$, 所以 $h(\Gamma_0) = h(\Gamma) \subseteq h(\Gamma - \Gamma_0)$.

充分性. 若 $h(\Gamma_0) \subseteq h(\Gamma - \Gamma_0)$, 则 $h(\Gamma) = h(\Gamma_0 \cup (\Gamma - \Gamma_0)) = h(\Gamma_0) \cap h(\Gamma - \Gamma_0) = h(\Gamma_0)$. 因此, Γ_0 为 Γ 的协调集.

定理 7 设 Γ_0 为 Γ 的协调集, 则 Γ_0 为约简当且仅当在 $(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 中, $\forall A \in \Gamma_0, \exists v \in \Omega_{\Gamma_0}$, 使得 $v(A) = 0$ 且 $v(\Gamma_0 - \{A\}) = 1$.

证明 必要性. 若 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 为 Γ 的约简, 则 $\forall A \in \Gamma_0, D(\Gamma_0 - \{A\}) \neq D(\Gamma_0)$ 所以 $A \notin D(\Gamma_0 - \{A\})$, 由完备性定理知 $\Gamma_0 - \{A\} \not\models A$ 所以 $\exists v \in \Omega_{\Gamma_0}$, 使得 $v(A) = 0$ 且 $v(\Gamma_0 - \{A\}) = 1$.

充分性. 若在 $(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 中, $\forall A \in \Gamma_0, \exists v \in \Omega_{\Gamma_0}$ 使得 $v(A) = 0$ 且 $v(\Gamma_0 - \{A\}) = 1$, 则 $\Gamma_0 - \{A\} \models A$, 由完备性定理知 $A \in D(\Gamma_0 - \{A\})$, 又 Γ_0 为 Γ 的协调集, 所以 Γ_0 为 Γ 的约简.

定理 8 设 Γ_0 为 Γ 的协调集, 则 Γ_0 为约简当且仅当在形式背景 $(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 中 $\forall Q \subseteq \Gamma_0, Q = fh(Q)$.

证明 必要性. 如果 Γ_0 是约简, 显然是协调集. 若存在 $Q \subseteq \Gamma_0$, 使得 $Q \subset fh(Q)$, 则 $\forall A \in fh(Q) - Q$, 如果 $v(Q) = 1$, 则 $v(A) = 1$, 所以 $Q \models A$ 这与 Γ_0 是约简矛盾. 因此 $\forall Q \subseteq \Gamma_0, Q = fh(Q)$.

充分性. 首先 Γ_0 为 Γ 的协调集, 其次, $\forall A \in \Gamma_0$, 令 $Q = \Gamma_0 - \{A\}$, 则由 $Q = fh(Q)$ 知 $A \in fh(Q)$, 所以 $A \in D(\Gamma_0 - \{A\})$, 从而 $Q = \Gamma_0 - \{A\}$ 不是协调集, 所以 Γ_0 为 Γ 的约简.

定理 9 设 Γ_0 为 Γ 的协调集, 则 Γ_0 为约简当且仅当 $L(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0}) \cong \Gamma_0$ 为布尔代数.

证明 必要性. 若 Γ_0 为 Γ 的约简, 则 $\forall (P, Q) \in L(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$. 令 $\varphi: (P, Q) \rightarrow Q$, 显然, φ 为 $L(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 到 2^{Γ_0} 上的单射. 下证 φ 为满射, 只需证 $\forall Q \subseteq 2^{\Gamma_0}, (h(Q), Q) \in L(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 即可. 因为 Γ_0 为约简, 由定理 8 知在形式背景 $(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 中 $Q = fh(Q)$. 因此 $(h(Q), Q) \in L(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$, 所以 φ 为双射, 即 $L(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0}) \cong \Gamma_0$ 为布尔代数.

充分性. 欲证 Γ_0 为约简, 只需证明在形式背景 $(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 中 $\forall Q \subseteq \Gamma_0, Q = fh(Q)$. 否则设存在 $Q_0 \subseteq \Gamma_0$ 使得 $Q_0 \subset fh(Q_0)$, 则在 $L(\Omega_F, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 中不存在以 Q_0

为内涵的概念. 设 $\varphi: (P, Q) \rightarrow Q$ 为 $L(\Omega_{\Gamma_0}, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 到 2^{Γ_0} 上的映射, 显然 φ 为单射, 因为在 $L(\Omega_{\Gamma_0}, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 中不存在以 Q_0 为内涵的概念, 所以 Q_0 没有原像, 即 φ 不是满射, 所以 $|L(\Omega_{\Gamma_0}, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})| < |2^{\Gamma_0}|$, 这与 $L(\Omega_{\Gamma_0}, \Gamma_0, I_{\Gamma_0}) \cong 2^{\Gamma_0}$ 矛盾, 因此 Γ_0 为约简.

例 3 设 $\Gamma = \{p_1, p_2, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_1, p_1 \vee p_2\}$, 则 $(\Omega_{\Gamma}, \Gamma, I)$ 如表 2 所示, 由 $(\Omega_{\Gamma}, \Gamma, I)$ 所形成的概念如表 3 所示, 概念格 $L(\Omega_{\Gamma}, \Gamma, I)$ 如图 1 所示. 由定理 7 和定理 8 容易验证该命题集有四个约简分别是: $\Gamma_1 = \{p_1, p_2\}$, $\Gamma_2 = \{p_1, p_1 \rightarrow p_2\}$, $\Gamma_3 = \{p_2, p_2 \rightarrow p_1\}$, $\Gamma_4 = \{p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_1, p_1 \vee p_2\}$

表 2 形式背景 $(\Omega_{\Gamma}, \Gamma, I)$

I	p_1	p_2	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_2 \rightarrow p_1$	$p_1 \vee p_2$
$v_1(0, 0)$	0	0	1	1	0
$v_2(0, 1)$	0	1	1	0	1
$v_3(1, 0)$	1	0	0	1	1
$v_4(1, 1)$	1	1	1	1	1

表 3 由 $(\Omega_{\Gamma}, \Gamma, I)$ 所形成的概念

- FC1 $(\{v_4\}, \Gamma)$
 FC2 $(\{v_1, v_4\}, \{p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_1\})$
 FC3 $(\{v_2, v_4\}, \{p_2, p_1 \rightarrow p_2, p_1 \vee p_2\})$
 FC4 $(\{v_3, v_4\}, \{p_1, p_2 \rightarrow p_1, p_1 \vee p_2\})$
 FC5 $(\{v_1, v_2, v_4\}, \{p_1 \rightarrow p_2\})$
 FC6 $(\{v_1, v_3, v_4\}, \{p_2 \rightarrow p_1\})$
 FC7 $(\{v_2, v_3, v_4\}, \{p_1 \vee p_2\})$
 FC8 $(\{v_2, v_2, v_3, v_4\}, \{\phi\})$

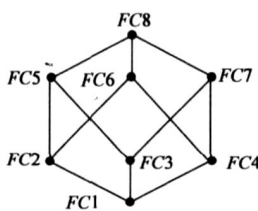


图 1

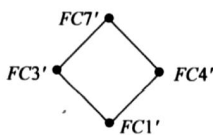


图 2

以 $\Gamma_1 = \{p_1, p_2\}$ 为例, 由形式背景 $(\Omega_{\Gamma_0}, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 所形成的概念见表 4, 对应的概念格 $L(\Omega_{\Gamma_0}, \Gamma_0, I_{\Gamma_0})$ 见图 2.

表 4 形式背景 $(\Omega_{\Gamma_1}, \Gamma_1, I_{\Gamma_1})$ 所形成的概念

FC1' $(\{v_4\}, \{\Gamma_1\})$	FC4' $(\{v_3, v_4\}, \{p_1\})$
FC3' $(\{v_2, v_4\}, \{p_2\})$	FC7' $(\{v_2, v_3, v_4\}, \{\phi\})$

首先可以证明 $h(\Gamma_i) = h(\Gamma)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 其次图 2 所示的格为 4 元布尔代数, 而 Γ_1 中包含两个公式, 由定理 9 可以知 Γ_1 为 Γ 的约简. 虽然 $L(\Omega_{\Gamma}, \Gamma, I)$ 也为布尔代数, 但是由于 Γ 含有 5 个公式, 而图 1 为 8 元布尔代数, 因此 Γ 不是自身的约简. 同理可以验证, 虽然

$L(\Omega_{\Gamma_4}, \Gamma_4, I_{\Gamma_4})$ 也为 8 元布尔代数, 但是由于 Γ_4 含有 3 个公式, 所以 Γ_4 为 Γ 的约简.

5 一种求 Γ 约简的方法

如前所述, 一个公式要么为必要公式, 或者为不必要公式, 并且如果 A 是 Γ 的不必要公式, 则 $D(\Gamma - \{A\}) = D(\Gamma)$. 因此为了求 Γ 的约简, 我们首先要给出必要公式和不必要公式的判定定理.

定理 10 $A \in \Gamma$ 为必要公式当且仅当存在 $v \in \Omega_{\Gamma}$, 使得 $v(A) = 0$ 且 $v(A') = 1 (A' \neq A, A' \in \Gamma)$.

证明 充分性. 令 $\Gamma_0 = \Gamma - \{A\}$, 因为 $v(A) = 0$ 且 $v(A') = 1 (A' \neq A, A' \in \Gamma)$ 则 $v(\Gamma - \{A\}) = 1$, 而 $v(A) = 0$, 所以 $h(\{\Gamma_0\}) \not\subseteq h(\{A\})$, 则 Γ_0 不是协调集, 因此, A 为必要公式.

必要性. 假设 $\forall v \in \Omega_{\Gamma}$ 对于所有满足 $v(A) = 0 (\forall v \in \Omega_{\Gamma})$ 的赋值而言都存在公式 $A' (A' \neq A, A' \in \Gamma)$ 使得 $v(A') = 0$, 下证 A 为不必要公式. 因为 Ω_{Γ} 有限, 不妨设 $\{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}\} \subseteq \Omega_{\Gamma}$ 为所有满足 $v(A) = 0$ 的赋值之集, 则存在公式 $\{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}\} \subseteq \Gamma - \{A\}$, 满足 $v_{ij}(A_{ij}) = 0 (j = 1, 2, \dots, n)$, 则 $h(\{\Gamma - \{A\}\}) \subseteq h(\{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}\}) \subseteq h(\{A\})$. 由定理 6 知 $\Gamma - \{A\}$ 为协调集, 因此 A 为不必要公式.

由定理 10 可知, 为了求出 Γ 的一个约简, 我们可以按以下步骤进行:

(1) 给定命题集 $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 设 Γ 中含有 m 个原子公式, 根据二值命题逻辑运算规则求出由 Γ 所诱导的形式背景 $(\Omega_{\Gamma}, \Gamma, I)$;

(2) 设 $\Gamma_0 = \Gamma$, 若 A_1 为 Γ_0 的不必要公式, 即就 A_1 而言, 对于每个满足 $v(A_1)$ 的赋值 v , 均存在 $A' \in \Gamma_0 - \{A_1\}$ 满足 $v(A') = 0$ 在这种情况下令 $\Gamma_1 = \Gamma_0 - \{A_1\}$, 否则令 $\Gamma_1 = \Gamma_0$; 然后考察 A_2 , 若 A_2 为 Γ_1 的不必要公式, 令 $\Gamma_2 = \Gamma_1 - \{A_2\}$, 否则令 $\Gamma_2 = \Gamma_1$, 依次进行下去, 因为 Γ 有限, 所以肯定存在 Γ_i 使得 Γ_i 中的公式全为 Γ_i 的必要公式, 此时 Γ_i 就为一个约简.

例 4 以例 1 所给的命题集 Γ 为例, 由定理 10 和表 1 可知 A_1 为 Γ 的必要公式, 因此令 $\Gamma_1 = \Gamma$, A_2 为 Γ_1 的不必要公式, 因此令 $\Gamma_2 = \Gamma_1 - \{A_2\}$, 同理 A_3 为 Γ_2 的不必要公式, 因此令 $\Gamma_3 = \Gamma_2 - \{A_3\}$, A_4 为 Γ_3 的必要公式, 因此令 $\Gamma_4 = \Gamma_3$, 同理 A_5 为 Γ_4 的必要公式, 因此令 $\Gamma_5 = \Gamma_4$, A_6 为 Γ_5 的不必要公式, 因此令 $\Gamma_6 = \Gamma_5 - \{A_6\} = \{A_1, A_4, A_5\}$, 则 Γ_6 是一个约简. 如果想要求出 Γ 的全部约简只需改变 A_i 的输入次序即可.

6 结束语

本文在二值命题逻辑中利用概念格的方法从语义

的角度给出了有限命题集 Γ 的约简理论,并给出了一种求约简 Γ 的方法.我们知道,在二值命题逻辑的经典描述中,一个命题集 Γ 要么是相容的,要么是不相容的.不相容的命题集都是一样的,因为 $F(S)$ 中的每一个公式都是其结论,但相容的命题集却可以很不一样,为了对命题集再进行细分,文献[5,8,9]中引入了命题集的相容度的概念,从这个意义上讲,本文是在保持命题集相容度不变的情况下对命题集 Γ 进行约简,但是对 Γ 的一个约简 Γ_0 而言, Γ_0 中不同的公式对 Γ 的相容度影响可能是不同的,因此我们还可以考虑在与原来相容度误差很小的范围内对 Γ_0 再进行约简,以及如何把这种方法推广到多值命题逻辑当中,这些问题我们将于另文中讨论.

参考文献:

- [1] 任燕,马晓珏,王洪涛. L^* 命题集的约简及命题集的根[J]. 模糊系统与数学,2006,20(2):23-27.
Ren Yan, Ma Xiaojue, Wang Hongtao. Reduction of a propositional set and its roots in (L^*) system[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(2):23-27. (in Chinese)
- [2] Wille R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts[M]. Rival I. Ordered Sets. Dordrecht-Boston: Reidel, 1982. 445-470.
- [3] 强宇,刘宗田,林炜,等. 模糊概念格在知识发现的应用及一种构造算法[J]. 电子学报,2005,33(2):350-354.
Qiang Yu, Liu Zongtian, Lin Wei, et al. Research on fuzzy in concept lattice in knowledge discovery and a construction algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(2):350-354. (in Chinese)
- [4] 张文修,魏玲,祁建军. 概念格的属性约简理论与方法[J]. 中国科学, E 辑 2005, 35(6):628-639.
Zhang Wenxiu, Wei Ling, Qi Jianjun. Attribute reduction theory and approach to concept lattice[J]. Science in China (Series E) 2005, 35(6):628-639. (in Chinese)
- [5] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京:科学出版社,2006.
- [6] P Hajek. Metamathematics of Fuzzy Logic [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [7] B Ganter, R Wille. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations [M]. Berlin: Springer, 1999.
- [8] GJ Wang, WX Zhang. Consistency degrees of finite theories in Lukasiewicz propositional fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and System, 2005, 149(3):275-284.
- [9] XN Zhou, GJ Wang. Consistency degrees of theories in some systems of propositional fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and System, 2005, 152(3):321-331.

作者简介:



李立峰 男,1980 年生于陕西长安,西安邮电学院应用数理系助教,硕士.主要从事不确定性推理与概念格理论的研究.
E-mail: hlw12-12@sohu.com

张东晓 男,1980 年出生,集美大学理学院助教,硕士.主要从事不确定性推理与概念格理论的研究.